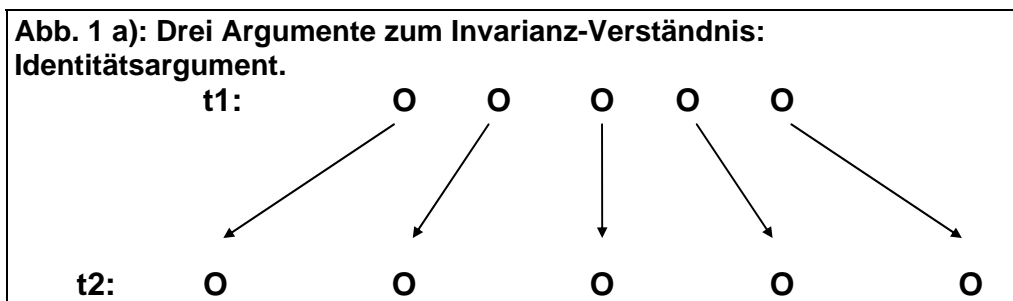


Dr. Andreas Schulz

Wie kommen Kinder zur Zahl?

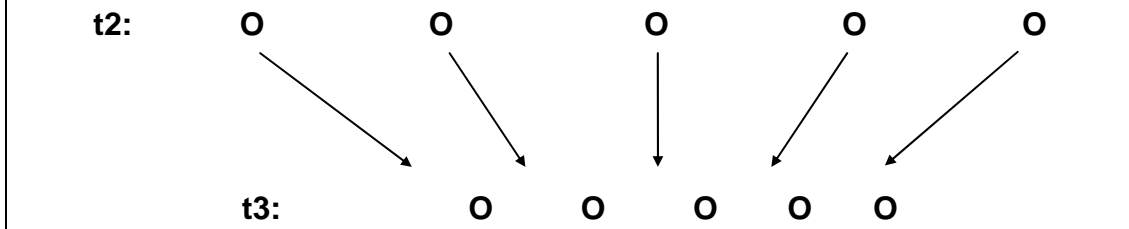
Beschäftigt man sich mit dem Spracherwerb, so wird niemand widersprechen, wenn man sagt, der Spracherwerb ginge mit der Geburt los. Wenn wir uns den Rechnerwerb anschauen, so denken dagegen viele, die Stunde Null der Mathematik sei der Schuleintritt. Dabei ist die Welt der Zahlen eigentlich auch schon mit der Geburt im kindlichen Alltag fest verankert und wird von daher auch von Anfang an erlebt. Schon Babys erkennen: Mutter ist da, wenn sie gesehen oder gehört wird; sie wird ansonsten vom Baby vermisst. Die Vorstellung „da oder nicht da“ ist eine binäre Mengenvorstellung (auch wenn die Menge Mutter da sein kann, wenn man sie nicht sieht oder hört – das spielt für unsere Belange erstmal keine Rolle). Anderes Beispiel: Am Essenstisch fragt die Mutter ihr vierjähriges Kind: „Du hast großen Hunger. Willst Du noch ein Fischstäbchen?“ Und das Kind ahnt, dass es dann mehr als die zwei werden, die es schon auf dem Teller hat. Kinder erleben schon von Geburt an den Umgang mit Mengen und Zahlen. Wie aber wird dann eine systematische Mengen- und Zahlvorstellung erworben? Gibt es Entwicklungsschritte?

Die Frage, wie Kinder Zahlvorstellungen bzw. Zahlbegriffe entwickeln, führt zu den Arbeiten Jean Piagets (1965). Er ging davon aus, dass der Zahlbegriff durch die aktive Aneignung von Wissen allmählich in Stufen geschieht. Die Fähigkeit zur Klassifikation (Klassenbildung) und zur Seriation (Reihenfolgen bilden) sowie das Invarianzverständnis sind in Piagets Theorie unabdingbare Voraussetzungen für den ausgebildeten Zahlbegriff. Invarianz meint dabei die Erkenntnis, dass eine Menge in ihrer Anzahl gleich bleibt, wenn sie nur in der Art der räumlichen Verteilung oder in der äußeren Gestalt der Elemente verändert bzw. unterteilt oder aufgeteilt wird.



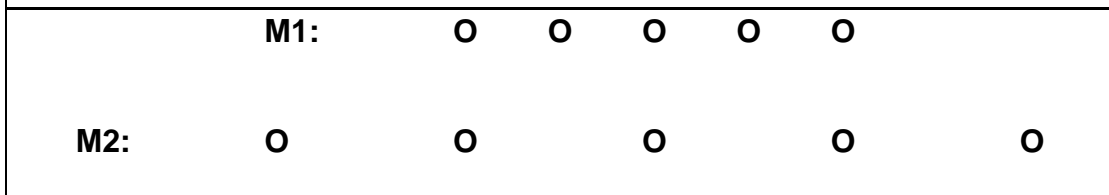
- *Identitätsargument*: Erkennen, dass eine Menge gleich bleibt, auch wenn man z.B. eine Reihe von Plättchen auseinanderzieht, d.h. eine Umformung vornimmt.

**Abb. 1 b): Drei Argumente zum Invarianz-Verständnis:
Reversibilitätsargument.**



- *Reversibilitätsargument:* Erkennen, dass jede vorgenommene Umformung rückgängig gemacht werden kann.

**Abb. 1 c): Drei Argumente zum Invarianz-Verständnis:
Kompensationsargument.**



- *Kompensationsargument:* Erkennen, dass bei der Beurteilung von Quantitäten mehrere Dimensionen zu berücksichtigen sind (z.B. kompensieren sich die Länge der Plättchenreihe und die Lückengröße zwischen den Plättchen, so dass zwei Mengen gleich mächtig sind).

Die Bedeutung der Zahlinvarianz wird jedoch heute durch etliche Untersuchungen in Frage gestellt. So sind Kinder schon sehr früh, nämlich bereits im Alter von 4 - 5 Jahren, ansatzweise zur Einsicht in die Invarianz in der Lage. Auch können sie in der Regel schon gut mit Zahlen und Mengen operieren, bevor Zahlinvarianz erreicht ist. Hinzu kommt, dass das Zählen in Piagets Theorie einen untergeordneten Stellenwert einnimmt, obwohl Zählfertigkeiten neben dem mengenbezogenen Wissen im Vorschulalter herausragende Prädiktoren für die späteren Mathematikleistungen sind. So zeigt Krajewski (2003) auf, dass Kinder, die in ihrer Kindergartenzeit an den Aufgaben zum Mengen- und Zahlvorwissen gescheitert waren, später zumeist auch Probleme im Mathematikunterricht bekamen und eine Rechenschwäche entwickelten. Aktuelle entwicklungspsychologische Modelle zur Zahlbegriffsentwicklung betonen deshalb ausdrücklich die Bedeutung erster Zählfertigkeiten und frühen Zahlenwissens.

Ab wann aber wird das Mengen- und Zahlvorwissen erworben? Befunde aus der Säuglingsforschung **zur Entwicklung von Mengenkonzepten** zeigen, dass Säuglinge über – wohl angeborene – Mechanismen zur Mengenunterscheidung bis zu vier Objekten (**Gelman, 1990; Dehaene, 1999**), zum Zählen bis zu vier Objekten (**Starkey,**

1992), zum Simultanerfassen von Mengen, dem sogenannten Subitizing (vgl. Dehaene, 1999), zum Erkennen von Größer-Kleiner-Relationen (Geary, 1996) und zum Erkennen von Mengenveränderungen verfügen (vgl. Landerl et al., 2004). Bereits sechs Wochen alte Babys sind in der Lage, akustische und visuelle Reize als mengenmäßig gleich oder verschieden zu beurteilen. Dies geht wahrscheinlich auf einen angeborenen Mechanismus für Rechenleistungen zurück. Wir scheinen demnach eine auf die Mengenebene bezogene angeborene Fähigkeit zur Mengenvorstellung und –operation zu besitzen.

Diese wird in der Folge weiter ausdifferenziert: Kutzer und Probst (o. J., 22 bzw. Probst, 1983, 87) zeigen mit ihrer empirisch ermittelten Lernvoraussetzungsstruktur für den Zahlbegriff und für Zahloperationen auf, dass auf der untersten Hierarchiestufe das Benennen von Eigenschaften von Elementen, das dichotomische Entscheiden nach mehr oder weniger von Mengen, die Konjunktion, also das Verknüpfen von Eigenschaften und die Stück-für-Stück-Zuordnung von Mengen basale Voraussetzungen für den Zahlbegriff darstellen. Diese pränumerischen Fähigkeiten sind Voraussetzung für hierarchiehöhere Lerninhalte. Sie bilden quasi das Mengenbezogene Gerüst für eine wichtige Komponente im Zahlbegriff und den späteren Rechenfertigkeiten.

Auch die Entwicklung des ordinalen Zählens trägt zu einem differenzierten Zahlbegriff bei:

So kennzeichnet sich nach Ginsburg (1977, 3ff.) der Zahlbegriffserwerb zunächst im Übergang vom ungeordneten verbalen Zählen (z.B. 1, 3, 9, 5) zum geordneten verbalen Zählen in Vorwärtsrichtung, ohne dass eine Mengenvorstellung hiermit verbunden wird. Resnick (1983, 110f.) beschreibt dies als die Fähigkeit zum Aufzählen der „mental number line“ (Zahlenvers). Die zweiseitige Durchlaufbarkeit dieser Zahlwortfolge wird als Voraussetzung für das Verständnis der Komplementarität von Addition und Subtraktion angesehen (Fuson, 1987, 55). Zweiseitige Durchlaufbarkeit wird dabei als das flüssige Vor- und Rückwärtszählen von jeder Startzahl größer Eins verstanden.

Nach Resnick (1983, 111) wird diese Zahlwortfolge in der Entwicklung auch zur Repräsentation von Quantitäten ausgebildet, in der Zahlen mit Mengenvorstellungen verbunden sind. Durch das Abzählen von Objekten werden Zahlen als Vorstellungen von Quantitäten erworben. Bei diesem Abzählen sind bestimmte Zählprinzipien einzuhalten. Gelman und Gallistel (1978, 77ff.) zeigen nun auf, nach welchen Prinzipien man zählt. Folgende Regeln sind dabei von Bedeutung:

1. Eineindeutigkeitsprinzip (one-one principle):

Jedem Element einer zu zählenden Menge wird ein und nur ein Zahlwort zugeordnet.

2. Prinzip der stabilen Ordnung (stable-order principle):

Die Zahlwortreihe beim Zählen muss in einer stabilen, d.h. jederzeit gleichen, wiederholbaren Ordnung vorliegen. Dieses Prinzip entspricht dem Ordinalzahlprinzip.

3. Kardinalzahlprinzip (cardinal principle):

Das letzte beim Zählen verwendete Zahlwort beschreibt die Anzahl der gezählten Elemente.

4. Abstraktionsprinzip (abstraction principle):

Die drei erstgenannten Prinzipien (auch „how-to-count“ principles genannt), können auf jede beliebige Menge von Entitäten angewendet werden.

5. Anordnungs-Irrelevanz-Prinzip (order-irrelevance principle):

Das Zählen oder das Resultat des Zählens ist von der Anordnung der Elemente einer Menge unabhängig.

Die Förderung von Zähl- und Abzählfertigkeiten kann demnach als wesentliches Lernziel in der Zahlbegriffsentwicklung formuliert werden. So fordern auch Schmidt und Weiser (1982) die stärkere Berücksichtigung der Zählfertigkeiten in der fachdidaktischen Diskussion, da, wie sie zeigen konnten, Kinder schon mit guten Zählkompetenzen eingeschult werden, die man im arithmetischen Anfangsunterricht nutzen könnte.

Dabei fallen aber immer wieder Kinder auf, die zwar durchaus ausreichende Zählfertigkeiten entwickelt haben, diese aber nicht spontan zum Mengenvergleich einsetzen (Resnick et al., 1992, 217). Es lässt sich daher vermuten, dass Zählfertigkeiten und vorzählige Mengenvorstellungen zunächst voneinander unabhängige Wissenssysteme darstellen, die im weiteren Entwicklungsverlauf miteinander verbunden werden müssen. Auch das Entwicklungsmodell zur mathematischen Kompetenzentwicklung von Fritz, Ricken und Gerlach (2007) beschreibt die Fähigkeit zum Mengenvergleich zu Beginn noch als unverbunden mit der Fähigkeit zum Aufsagen der Zahlwortreihe. Somit scheint es auch wichtig zu sein, das Mengenzählen zum Mengenvergleich (und nachfolgend im Entwicklungsverlauf zum Zahlvergleich) einsetzen zu können. Das bedeutet, auch den Mengenzahlaspekt zu betonen, um ein relationales Zahlverständnis zu entwickeln. Es gilt also, abstrakte Zahlen mit konkreten Mengen zu assoziieren. Zahlvergleiche hinsichtlich Größer/Kleiner-Relationen zu verstehen bedeutet nicht nur zu wissen, dass Sieben größer als Fünf ist, weil sie später in der Zahlwortreihe steht. Ein solches ordinales Zahlwissen ist in Beziehung zu Mehr/Weniger-Urteilen bei Mengen zu setzen. Mit anderen Worten: Ein adäquater Zahlbegriff beinhaltet auch den Zahlvergleich nach Größer/Kleiner und die Fähigkeit, mit jeder Zahl eine Menge zu assoziieren und deren Mächtigkeit zu vergleichen. Zum Beispiel sind sechs Steine mehr als fünf Steine, daher steht die Zahl Sechs in der Zahlwortreihe nach der Fünf (bei Stück-zu-Stück-Zuordnung würde auffallen, dass ein Stein aus der Sechsermenge zur Fünfermenge nicht zuordenbar wäre, mithin Sechs also um eins größer als Fünf wäre). Fritz et al. (2007) sehen demgemäß das Inverbindungbringen des Schemas der Vermehrung/Verminderung von Mengen mit einer ordinalen Zahlenvorstellung als nächsten Entwicklungsschritt.

All diese Entwicklungsschritte zeigen eine Linie auf, die sich bis zum Schuleintritt und auch noch darüber hinaus vollziehen sollten. Wann welche Fähigkeit oder Einsicht erworben wird oder werden sollte, dazu gibt es kaum Studien. Man ist sich weitgehend einig, dass ein Stufenmodell vermutlich nicht klar abgegrenzt und linear verlaufend

skizziert werden kann. So fehlt bis heute eine geschlossene Entwicklungstheorie des Zahlbegriffs. Die hier beschriebenen Inhalte stellen jedoch wichtige Bausteine der Zahlbegriffsentwicklung dar.

Literatur:

Dehaene, S. (1999). Der Zahlensinn. Basel: Birkhäuser.

Fritz, A., Ricken, G. & Gerlach, M. (2007). Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Berlin: Cornelsen.

Fuson, K.C. (1987). Children´s counting and concept of number. Chapter 2: The number-word sequence: An overview of its acquisition and elaboration (pp. 33-60). New York: Springer.

Geary, D.C. (1996). Children´s mathematical development: Research and practical applications. Washington: American Psychological Association.

Gelman, R. (1990). First principles organize attention to and learning about relevant data: Number and animate-inanimate distinction and examples. Cognitive Science, 14, 79-106.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). The child´s understanding of number. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Ginsburg, H.P. (1977). Children´s Arithmetic: The Learning Process. New York: Van Nostrand Co.

Krajewski, K. (2003). Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Dr. Kovac.

Kutzer, R. & Probst, H.H. (o. J.). Strukturbezogene Aufgaben zur Prüfung mathematischer Einsichten. Marburg: Phillips-Universität, Institut für Heil- und Sonderpädagogik.

Landerl, K; Bevan, A. & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8-9 year old students, Cognition, 93, 99-125.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1965). Die Entwicklung des Zahlbegriffes beim Kinde. Stuttgart: Klett

Probst, H.H. (1983). Testverfahren zur Diagnostik spezifischer Lernvoraussetzungen. In Horn, R., Ingenkamp, K. & Jäger, R.S. (Hrsg.). Tests und Trends 3. Jahrbuch der Pädagogischen Diagnostik (S. 77-105). Weinheim: Beltz.

Resnick, L.B. (1983). A developmental theory of number understanding. In Ginsburg, H.P. (Ed.). The development of mathematical thinking (pp.109-151). New York: Academic Press.

Resnick, L.B., Bill, V. & Lesgold, S. (1992). Developing thinking abilities in arithmetic class. In Demetriou, A., Shayer, M. & Efklides, A. (Eds.). Neo-Piagetian theories of cognitive development: Implications and applications for education (pp. 210-230). London: Routledge.

Schmidt, S. & Weiser, W. (1982). Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. Journal für Mathematik-Didaktik, 3, 227-263.

Starkey, P. (1992). The early development of numerical reasoning. Cognition, 43, 93- 126.

Zum Autor:

Andreas Schulz ist promovierter Diplom-Psychologe. Er arbeitet seit ca. 15 Jahren im Themengebiet der Rechenschwierigkeiten von Grundschulern und ist Autor mehrerer Lehrbuchbeiträge zum Thema sowie dem mit Wolfgang Moog verfassten Hauptwerk „Zahlen begreifen“ (2005; 2. Auflage), in dem das Dortmunder Zahlbegriffstraining und der Test DORT-E gemeinsam enthalten sind. Als Lehrerfortbilder arbeitet er regelmäßig mit Grundschullehrern und Lehramtsstudenten zusammen.

